

北大秦簡《算書》土地面積類算題初識*

韓 巍

前言

北京大學藏秦簡牘中的數學類文獻非常豐富，共有竹簡四卷和“九九術”木牘一方。其中竹簡卷七、卷八的形式和內容很接近，只列出矩形土地的“廣”、“從（縱）”和面積數字，相當於有整數、無分數的簡單“方田術”，僅有例題而無術文。卷八有背題“田書”，應是這類書的專名。這類書可能是爲了方便日常的田畝和租稅計算而編制的教材或參考書，與我們通常所說的包含各種計算方法和例題的《數書》或《算書》有別。竹簡卷四正面前半段的 210 餘枚簡、背面起始處的近 40 枚簡，以及竹簡卷三的 82 枚簡，其內容都是各種計算方法和例題的彙編，與《九章算術》、張家山漢簡《筭數書》和嶽麓秦簡《數》屬於同類文獻；爲行文方便，本文分別稱之爲《算書》甲種、乙種和丙種。¹

《算書》乙種和丙種的結構只是簡單地羅列各種算題，《算書》甲種卻明顯經過有意地設計和編排。《算書》甲種的開篇爲《魯久次問數于陳起》，是一篇長達 800 多字的有關數學起源和意義的議論性文字，相當於“序言”；其後是一篇“九九術”表格，共 8 枚簡；再後爲“少廣”術，第一枚簡頭端有黑色方塊作爲標誌；再後爲“田”、“租禾”、“租泉”三篇，每篇之前有一枚單獨的“篇題簡”，簡首涂成黑方塊，其下書寫篇題，有關土地面積和長、寬的算題都在“田”篇中；“租泉”之後又接抄了一些田畝和租稅類算題，與“租泉”篇之間相隔一枚空白簡；再後是各種算題的雜抄，雖然有“以類相從”的特點，但沒有獨立成“篇”的結構；最後是衡制換算。有關土地面積的算題除了集中見於《算書》甲種外，在《算書》丙種中也有一些。

眾所周知，《九章算術》一書關於幾何圖形面積的計算集中於第一章“方田”中，包括“方田”、“里田”、“大廣田”、“圭田”、“邪田”、“箕田”、“圓田”、“宛田”、“弧田”、“環田”共十種，說明這類問題與土地面積的計算有密切關係。在張家山漢簡《筭數書》和嶽麓秦簡《數》中也有這類算題，但爲數不多。《筭數書》中僅有“大廣”、“方田”、“里田”三道算題涉及土地面積計算，其中的“方田”還是採用盈不足術求正方形土地的邊長，與《九章算術》的“方田術”并不相同。《數》中屬於此類的竹簡共有 15 枚（整理號五二一一六六），包括“方田”、“大廣”、“里田”、“箕田”、“周田”（即“圓田”）等幾種算題。²北大秦簡《算

* 本文的研究得到國家社科基金重大項目“北京大學藏秦簡牘整理與研究”（項目批准號：10&ZD090）的資助。本文寫作和修改過程中，得到中國科學院自然科學史研究所郭書春、鄒大海兩位先生的熱情幫助；他們提出很多寶貴的意見和建議，還提示了一些重要參考資料，在此謹對兩位先生致以衷心的感謝。對於兩位先生的意見，文中均一一注明；兩位先生意見不一致之處，文中也并存兩說。由於作者水平有限，對兩位先生之說或有理解不夠準確之處，如有錯誤概由作者本人負責。

¹ 參看韓巍：《北大秦簡中的數學文獻》，《文物》2012 年第 6 期。案：此文曾將竹簡卷四正面和背面的兩種《算書》稱之爲“甲篇”和“乙篇”，現在改稱“《算書》甲種”和“《算書》乙種”。

² 其中涉及正方形土地面積計算的竹簡 1 枚，只有例題，無術文和術名；包含整數和分數相乘的矩形土地面積計算的竹簡共 9 枚，有術文和例題，但無術名，實際上等於《九章算術》的“大廣田”和《筭數書》的“大廣”；“里田”、“箕田”皆有術文和術名，無例題，只有“周田”術名、術文和例題兼備；還有 1 枚

書》中的土地面積類算題，無論是數量還是類型都比《筭數書》和《數》豐富得多，為認識戰國晚期至秦代平面幾何學的發展水平提供了難得的新資料。

下面就分類介紹一些有代表性的算題，並與同類文獻進行比較，簡單討論一下所涉及到的問題，以求方家指正。¹

一、圓田術

北大秦簡中的“圓田術”見於《算書》甲種的“田”篇和《算書》丙種。

《算書》甲種：

●員（圓）田述（術）：半周半徑相乘毆（也），田即定。其一述（術）：藉（藉）周自乘毆（也），十二成一。其一（04-185）述（術）：半周以為廣從（縱），令相乘毆（也），三成一。（04-186）

今有田員（圓）卅步，問幾可（何）？曰：田七十五步。程桑如此。²（04-187）

《算書》丙種：

■圓（圓）田周卅步，令三而一為徑=，（徑）十步，為田七十五步。•其述（術）曰：半周半徑相乘即成。•一述（術）曰：周乘（03-16）周，十三成一。•一述（術）曰：徑乘周，四而成一。•一述（術）曰：參（三）分周為從（縱），四分周為廣，相乘即成。•述（術）（03-11）曰：徑乘徑，四成三。（03-17）

《算書》甲種列出了求解圓形面積的三種“術”：

- a. 周長的一半乘以半徑。
- b. 周長乘以周長，除以十二。
- c. 周長的一半相乘，除以三。

其中“術”a可得出圓形的實際面積，“術”b、c都是假定圓周率為“3”，得數略大於實際面積。

《算書》丙種共列出五種“術”，其第一、第二術與《算書》甲種的“術”a、b相同，其餘三“術”則不同：

- d. 直徑乘以周長，除以四。
- e. 周長的三分之一乘以周長的四分之一。
- f. 直徑相乘，再乘以四分之三。

另外，本題的第二“術”作：“周乘周，十三成一”，¹很值得注意。“周乘周”這一術文也見於嶽麓簡和《九章算術》，均作“十二成一”，都是把圓周率假定為“3”，故其得數略大

竹簡術名第一字殘（整理者補為“除”），術文是長二百四十步的矩形土地在不同寬度下的面積，相當於特殊的“方田”。

¹ 北大秦簡《算書》中與田畝有關的還有“啟廣”、“啟從（縱）”、“少廣”、“大廣”等術，與以往的發現相比新意不多，本文不再專門介紹。

² “程桑如此”應是指“程桑”算題的解法與本題相同，但北大簡《算書》中并未發現“程桑”一題，在傳世和出土秦漢數學文獻中也未見到。這充分說明北大簡《算書》只是當時流傳的數學文獻的選編本，編者所見到的算題還有相當一部分沒有收入，嶽麓簡《數》和張家山簡《筭數書》的情況也與之類似。

於圓形實際面積。北大簡《算書》丙種作“十三成一”，其結果是得數略小於圓形實際面積；此時周徑之率為 $\frac{13}{4}$ ，比3更接近於圓周率的真值或徽率 $\frac{157}{50}$ （與徽率相比，3的誤差是0.14，而 $\frac{13}{4}$ 的誤差是0.11）。我們覺得此處“十三”可能並非“十二”之筆誤，而是反映出當時已有人認識到圓周率的實際數值應略大於“3”。不過這種認識在當時並不普遍，《算書》丙種開頭的例題就說“令三而一為徑”，其後的“術”e、f，以及《算書》甲種的“術”b、c，都是把圓周率定為“3”，嶽麓簡《數》和《九章算術》也是如此。可見把圓周率定為“3”是戰國晚期至西漢時期計算圓形面積時的普遍做法。雖然北大簡“十三”為“十二”之筆誤的可能性還不能完全排除，但這一記載對於瞭解中國古代圓周率發展史意義重大，不容忽視。

嶽麓簡“周田術”算題：

周田述（術）曰：周乘周，十二成一；其一述（術）曰，半周半徑，田即定；徑乘周，四成一；半徑乘周，二成一。（65）周田卅步，為田七十五步。（66）²

本題共列出四種“術”，前三“術”分別相當於北大簡《算書》的“術”b、a、d；第四“術”是半徑乘以周長再除以二，其實是第二術稍加變通。

《九章算術》“圓田”共列出四種“術”：

術曰：半周半徑相乘得積步。

又術曰：周徑相乘，四而一。

又術曰：徑自相乘，三之，四而一。

又術曰：周自相乘，十二而一。

這四種“術”分別相當於北大簡的“術”a、d、f、b。因此可以說，《九章算術》記載的圓形面積算法在戰國晚期都已形成，而北大簡《算書》是目前記載此類算法最豐富的一種秦漢數學文本。北大簡的“術”c、e不見於嶽麓簡《數》和《九章算術》，而這兩“術”恰好都是將圓形周長化為矩形兩邊的算法。郭書春先生指出，將圓面積的近似值化成矩形，近似地推導圓面積公式，是當時的慣常做法。比如劉徽在用極限思想和無窮小分割方法嚴格證明《九章算術》的 $S = \frac{1}{2}Lr$ 之前，先記載了以圓內接正六邊形的周長作為圓周長，以圓內接正十二邊形的面積作為圓面積，化成半周為縱、半徑為廣的矩形推導圓面積公式的方法。

另外還有一個有趣的現象，北大簡兩道算題和嶽麓簡“周田”所舉的例題，以及《九章算術》“圓田”的第一道例題，都是周長三十步、直徑十步、面積七十五平方步的圓形土地，這充分說明了三種文本之間的“同源”關係。

二、箕田術

《九章算術》對梯形土地面積的計算包括“邪田”和“箕田”兩種，前者是直角梯形，後者是等腰梯形。其“箕田”術曰：

¹ “一”字原脫。

² 朱漢民、陳松長主編：《嶽麓書院藏秦簡（貳）》，上海辭書出版社2011年（下文引嶽麓簡資料皆見此書）。

并踵、舌而半之，以乘正從，畝法而一。

“舌”指梯形較長的底邊，“踵”指梯形較短的底邊，“正從（縱）”即梯形之高，此術也就是我們現在所熟悉的“梯形面積=（上底+下底）×高÷2”。

嶽麓簡“箕田”術文與《九章算術》相似，而敘述較詳細：

箕田曰：并舌、踵（踵）步數而半之，以爲廣，道舌中丈徹踵（踵）中，以爲從（縱），相乘即成積步。（64）

“道舌中丈徹踵（踵）中，以爲從（縱）”，是說梯形兩底邊中點之間的距離就是其“高”，即“正從（縱）”。這說明秦漢時期的“箕田”確實是指等腰梯形，劉徽注說“中分箕田則爲兩邪田”是正確的。

北大簡《算書》甲種的“箕田”術文較《九章算術》更爲簡略：

●箕田述（術）：并其兩廣而半之，以乘從（縱），即成步毆（也）。（04-181）

今有田一端（端）十步，一端（端）廿步，從（縱）廿步，爲田一畝六十步。（04-182）

術文將梯形的上下兩底邊概稱爲“兩廣”，而不區分爲“舌”、“踵”，其例題的“端（端）”也就是術文所說的“廣”。郭書春先生指出，《九章算術》和嶽麓簡《數》用箕形的“踵”、“舌”來指代梯形兩底邊，還沒有脫離實際應用的痕跡；相比之下，北大簡用“兩廣”來表述，則是更爲抽象、純粹的數學語言。

三、田三匚（陋）術

《九章算術》的“圭田”指的是三角形土地，其術文非常簡單：“半廣以乘正從（縱）”，即我們今天熟悉的“三角形面積=底×高÷2”。三角形土地面積計算不見於嶽麓簡《數》，但在北大簡的《算書》甲種和丙種中都有發現。

《算書》甲種：

●田三匚（陋）述（術）：丈其中以爲從（縱），半其廣，即廣毆（也），以乘從（縱），即成步。（04-183）

今有田一面十步，丈其中八步半步，爲田卅二步半步。（04-184）

“匚”字過去曾見於睡虎地秦簡《日書》甲種，例如：

困居宇西南匚，吉。（16 背肆）困居宇東北匚，吉。（17 背肆）

整理組注曰：“匚，疑讀爲陋，義爲邊塞狹隘，在此當指宅院的角隅。”¹案：《說文·匚部》：“匚，側逃也。從匚，丙聲，一曰箕屬。”《說文·自部》：“陋，陋陝也，從自、匚聲。”“陋”即“陋”之異體，亦省寫爲“匚”。《汗簡》、《古文四聲韻》引《古爾雅》“陋”字作以下二形，²其中 B 顯然就是“匚”字，A 則稍有訛變：

A （《汗簡》） B （《古文四聲韻》）

¹ 睡虎地秦墓竹簡整理小組編：《睡虎地秦墓竹簡》，第 211 頁，文物出版社 1990 年。

² 郭忠恕、夏竦編：《汗簡 古文四聲韻》，中華書局 1983 年；《汗簡》，第 35 頁，上欄；《古文四聲韻》，第 69 頁，上欄。

從北大簡以上文例看來，將“𠄎（陋）”解為“角隅”是正確的，“田三𠄎”也就是三角形的田。“丈其中以爲從（縱）”，結合嶽麓簡“箕田”術文，我懷疑此處之“中”指的是三角形底邊的中點，本題有可能是等腰三角形面積的計算，鄒大海先生也表示贊同。但郭書春先生認爲“丈其中”就是度量三角形的高，本題所指還是一般的三角形。無論如何，本題的計算方法與《九章算術》并無不同。

《算書》丙種：

■田三𠄎（陋），一面正一面邪者，令正面相乘，二成一。•正廿步，邪廿二步，爲田二百步。（03-018）

田三𠄎（陋）者，半其一面以爲廣，【又】令一面五爲四從（縱）相乘，即成。•面十五步，爲田九十步。（03-036）

本題包括兩“術”和兩道例題。第一“術”的“一面正一面邪”說的應該是直角三角形，“正”指直角邊，“邪”指直角所對的斜邊。“正面相乘，二成一”是說兩直角邊相乘再除以二。值得注意的是，其例題只給出了一條直角邊和一條斜邊，需要用勾股關係求出另一條直角邊的長度；但從其面積“二百步”，一直角邊長“廿步”推算，另一條直角邊也應長“廿

步”，即等腰直角三角形，那麼其斜邊的長度不應是“廿二步”，而應爲 $\sqrt{20^2 + 20^2}$ ，即約等於“廿八步”，其計算有誤。郭書春先生同意此說，並且認爲術文的“一面正”似應爲“二面正”之誤。等腰直角三角形的直角邊與斜邊的關係，相當于正方形的邊與對角綫的關係。中國古代有“方五斜七”的說法，即正方形邊長與對角綫長度之比爲五比七，那麼本問題的直角三角形正好符合這一比例，即 20：28=5：7。

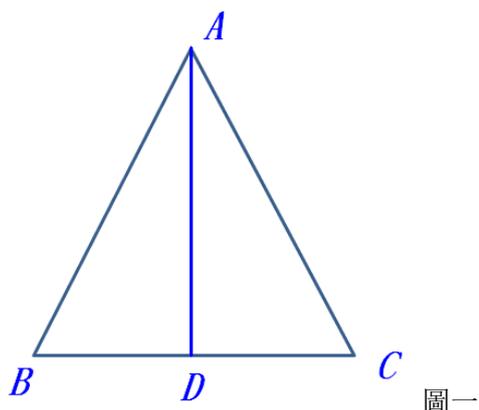
鄒大海先生則提出另一種設想：本題可能是指等腰三角形（圖一），正廿步爲底 BC 的長度，邪廿二步爲腰 AB （或 AC ）的長度。那麼按照勾股定理，這時底邊 BC 上的高 AD 爲

$\sqrt{22^2 - (20 / 2)^2} = \sqrt{384} \approx 19.596$ （步），接近 20 步；如果假设高和底都是 20 步，那麼腰

的長度爲 $\sqrt{20^2 + \left(\frac{20}{2}\right)^2} = 22.36$ （步），非常接近整數 22 步。但古人不一定利用開方由一條直角邊和一條斜邊求另一條直角邊，或由兩條直角邊求斜邊，而是可能採用近似的勾股弦

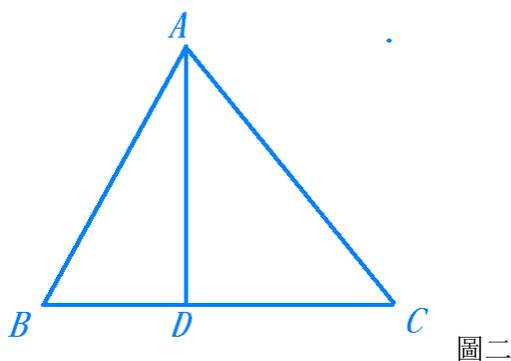
數據，如勾 5、股 10、弦 11 或勾 10、股 20、弦 22，由勾股弦中的二邊得到第三邊。按簡 03-018 的術文，古人先乘後除求面積： $BC \times AD \div 2 = 20 \times 20 \div 2$ 。“正面相乘”可能是指“正面和正面相乘”，因爲正面和從（縱）相等，故云。

無論採取以上哪一種可能性，本題在求解三角形的“高”時都要用到勾股弦三邊的關係。



圖一

簡 03-036 的術文結合例題看來，應該是指等腰三角形的面積計算，知其一“面”（腰）的長度，再由勾股關係求出此“面”所對的“正從（縱）”（高）。“令一面五為四從（縱）”，就是採用“勾三股四弦五”的比例，以另一“面”（腰）的五分之四為“從（縱）”。鄒大海先生認為本題可如圖二所示：



圖二

$CA=CB=15$ 步，由勾三股四弦五的關係，得到 $AD=CA \times \frac{4}{5}=12$ （步），然後計算 $CB \div 2 \times AD=15 \div 2 \times 12=90$ （步），即為面積。¹根據他對以上三則術文和例題的認識，鄒先生猜測“田三[匱]”指的就是等腰三角形，但認為尚需其他材料的驗證。

《算書》丙種的兩則術文和例題在計算三角形面積時都牽涉到直角三角形勾股弦關係的運用，與《九章算術》的“圭田術”差異很大，在早期數學文獻中實屬罕見，值得注意。

四、里田術

“里田術”是指將邊長單位為“里”的矩形土地面積換算成以“頃畝”為單位的算法。《九章算術》“里田”曰：“廣從（縱）里數相乘得積里，以三百七十五乘之，即畝數。”

張家山漢簡《筭數書》對“里田術”的敘述最為詳細：

里田 里田術（術）曰：里乘里=，（里）也，廣、從（縱）各一里，即直（置）一，

¹ 郭書春先生則認為本題是說直角三角形的一直角邊為 15 步，它是由另一直角邊“五為四從”得到的，那麼另一直角邊就是 $15 \times \frac{4}{5} = 12$ （步），故其面積為 $S = \frac{1}{2} \times 15 \times 12 = 90$ （步²），故本題未涉及勾股關係。

因而三之，有（又）三五之，即爲田三頃^十（七十）五畝。其廣、從（縱）不等者，先以里相乘，已（187），乃因而三之，有（又）三五之，乃成。今有廣二百廿里，從（縱）三百五十里，爲田廿八萬八千七百五十頃。直（置）提封以此爲之。（188）

一曰：里而乘里^二，（里）也，壹三，而三五之，即頃畝數也。有（又）曰：里乘里^二，（里）也，以里之下即予廿五，因而三之，亦其頃（189）畝數也。曰：廣一里、從（縱）一里，爲田三頃^十（七十）五畝。（190）¹

這道算題共列出四種術文，第一至三“術”的計算方法並無區別，即先用“廣”、“從（縱）”相乘得出平方里數，然後再乘以“ $3 \times (5 \times 5 \times 5)$ ”（即 375）得出畝數；《九章算術》則是將“一三之又三五之”的計算過程予以省略，直接用平方里數乘以 375。第四“術”略有不同，是把 1 平方里分成三頃和七十五畝兩數，分別乘以所得平方里數，即得頃數和畝數。

嶽麓簡“里田術”則相對簡略：

里田述（術）曰：里乘里^二，（里）也，因而參（三）之，有（又）參（三）五之，爲田三頃^十（七十）五畝。（62）

其計算方法與張家山簡前三“術”完全相同。

北大秦簡中的“里田術”見於《算書》甲種和丙種。

《算書》甲種：

●里田述（術）曰：里乘里，一毆（也），見一鼠（予）二，見二鼠（予）四^二，（四）者加一，因而三之，即頃畝毆（也）。（04-081）其一述（術）曰：里乘里^二，（里）毆（也），壹參（三）之，有（又）參（三）五之，即頃畝數毆（也）。（04-096）

今有方一里，問田幾可（何）？曰：三頃七十五畝。方十里，田三百七十五頃。（04-095）

本題包括兩種“術”，其第二術與嶽麓簡及張家山簡的前三術完全相同。第一“術”則爲前所未見，其中的“鼠”字應讀爲“予”；睡虎地秦簡《秦律十八種·金布律》：“都官佐、史不盈十五人者，七人以上鼠（予）車牛、僕”，“鼠”即通“予”。“見一予二，見二予四，四者加一”，其含義頗費解。郭書春先生推測，“見一予二”，成 3，即方里化成頃時“壹參之”；“見二予四，四者加一”似是將 2 變成 4，4 加 1 成 5，即“五之”之“五”；“因而三之”，即 3 次用 5 乘。

《算書》丙種：

■里乘里^二，（里）也，壹三有（又）三五之，即成田畝數，爲田三頃^十（七十）五畝。積四里爲田十五頃。（03-047）

其術文同於《算書》甲種“里田”的第二術，但其例題“積四里”是指四平方里，與《算書》甲種第二例題的“方十里”（一百平方里）不同。

五、徑田術

北大簡《算書》甲種有一則“徑田術”，爲前所未見：

¹ 張家山二四七號漢墓竹簡整理小組編：《張家山漢墓竹簡（二四七號墓）》，文物出版社 2001 年；彭浩：《張家山漢簡〈算數書〉注釋》，第 125-126 頁，科學出版社 2001 年。

●徑田述（術）：直（置）廣直（置）從（縱），除廣二百卅（步），從（縱）即成頃畝數；除從（縱）二百卅步，廣即成頃畝數（04-094）毆（也），以此盡之。不盈二百卅步者令相乘毆（也），如恒田。（04-093）

今有田廣二千五百廿步，從（縱）三千四百卅步，問田幾可（何）？曰：三百六十頃十五畝。（04-092）

鄒大海先生將本題術文解釋為：在“廣”上每伸展 240 步，相應的“縱”的步數就是“以此 240 步為廣的長方形部分的”畝數，亦即原來的“廣”有多少個 240 步，原田就有多少倍的“縱”那麼多畝；或者在“縱”上每伸展 240 步，相應的“廣”的步數就是“以此 240 步為縱的長方形部分的”畝數，亦即原來的“縱”有多少個 240 步，原田就有多少倍的“廣”那麼多畝。如果“廣”或“縱”（或按每 240 步做一劃分後餘下的部分）不足 240 步，那麼就將這部分的“廣”、“縱”相乘，按平常田地的計算方式得出結果。

我猜測，本題之所以叫“徑田術”，可能與“徑（經）分術”有關。¹“徑（經）分”的本意是指分數相除，“徑（經）”有“劃分”、“分割”之義，但在劉徽注中整數相除也被稱為“經分”。²“徑田術”先用“廣”或“縱”除以 240，與“徑分”有相似之處，或由此得名。

六、採用盈不足術的“方田術”

北大簡《算書》甲種還有一種特殊的“方田術”，首先見於“田”篇中部，其章首符號作“⊙”形，與其他章作大圓點“●”不同（簡稱“算題 A”）：

⊙ 欲方田述（術）：藉（藉）方十六而有餘十六，藉（藉）方十五不足十五，即并贏（盈）、不足以為（04-188）法，而直（置）十五，亦藉（藉）十五令相乘毆（也），即成步；有（又）藉（藉）卅一分十五，令韋（維）乘（04-229）上十五，有（又）令十五自乘毆（也），十五成一，從韋（維）乘者而卅一成，乃得從上即成，（04-100）為田一畝。其投此用三章。（04-099）

在“租泉”篇之後接抄的田畝類算題之中，又見到一則類似的算題（簡稱“算題 B”）：

⊙ 田一畝，曰：方十五步不足十五步，方十六有餘十六步，并贏（盈）、不足為法，不足為子，（04-216）得曰：十五步有（又）卅一分步十五。其述（術）曰：直（置）而各相乘也，如法得一步。（04-217）

這種算題不見於《九章算術》和嶽麓秦簡《數》，但與張家山漢簡《筭數書》中的“方田”非常相似：

方田 田一畝方幾何步？曰：方十五步卅一分步十五。術（術）曰：方十五步不足十五步，方十六步有徐（餘）十六步。曰：并贏（盈）、不足以為法，不足（185）子乘贏（盈）母，贏（盈）子乘不足母，并以為實。復之，如啟廣之術（術）（186）。³

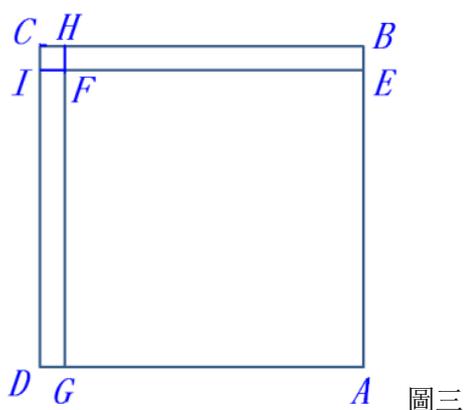
¹ 《九章算術》“方田”章有“經分術”，張家山漢簡《筭數書》作“徑分”，“經”、“徑”二字常通用。

² 參看郭書春：《九章算術譯注》，第 29 頁，上海古籍出版社 2009 年。

³ 《張家山漢墓竹簡（二四七號墓）》；彭浩：《張家山漢簡〈筭數書〉注釋》，第 124-125 頁。

鄒大海先生指出，算題 B 和《算數書》的“方田”性質相同，都是求解面積為一畝的正方形土地的邊長，但不是用開平方術，而是用盈不足術。兩題都是假設邊長為 15 步則太少，而假設為 16 步則太多，所以邊長肯定是比 15 步多一點；於是用贏的 16 步加上不足的 15 步，其和 31 步作為“法”（分母）。不同之處在於，北大簡是直接將不足的 15 步作為“實”（分子），得到邊長的分數部分 $15/31$ 步（整數部分已確定為 15 步）；張家山簡則是用“不足子乘贏母，贏子乘不足母，並以爲實”，將“實”除以上面的“法”，也得到邊長為 15 步又 $15/31$ 步。但北大簡隨後又補充了一則“術”：“直（置）各相乘也，如法得一步”。鄒先生認為此處文字有省略或脫文，作者的原意應包含這樣的意思：“不足”的 15 步與“贏”的 16 步和假設的 15 步與 16 步交叉相乘後再相加作為“實”，與張家山簡一致。

算題 A 則是算題 B 的逆運算，從求出的邊長 15 步又 $15/31$ 步出發，相應地還原成正方形田的面積一畝，具有驗算的意味。其計算方法大致如圖三所示：



圖三

四邊形 $ABCD$ 為邊長等於 15 步又 $15/31$ 步的正方形，其內側的四邊形 $A'EF'G$ 為邊長等於 15 步的正方形。

“而直（置）十五，亦藉（藉）十五令相乘毆（也），即成步”是指內側正方形 $A'EF'G$ 的兩邊（都是 15 步）相乘，得到其面積（為 225 步）。

“有（又）藉（藉）卅一分十五，令韋乘上十五”是說大正方形 $ABCD$ 的邊長比其內側正方形 $A'EF'G$ 的邊長（15 步）多出的長度（ $HF=CI=BE=FI=CH=DG$ ）為 $15/31$ 步，以之乘內側正方形 $A'EF'G$ 的邊長（15 步）得到外側長方形（ $EBHF$ 或者 $FIDG$ ）的面積（都是 $225/31$ 步）。於是，兩個外側長方形 $EBHF$ 和 $FIDG$ 面積之和為 $450/31$ 步。本句是指兩次相乘得到兩個長方形 $EBHF$ 或者 $FIDG$ 的面積，具體地說有可能是“卅一分十五，乘上十五”和“上十五，乘卅一分十五”兩個運算，作者省略了描述把兩個運算的結果相加的文字。

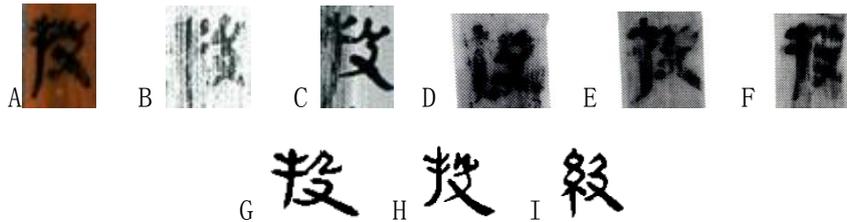
“有（又）令十五自乘毆（也），十五成一，從韋乘者而卅一成，乃得從上即成”的意思是 15 步乘以 15 步，再除以 15 步，得到 15 步，加入上面的 $450/31$ 步，得到 465 步，再除以 31，得到 15 步。這樣大正方形 $ABCD$ 的面積（由內側正方形 $A'EF'G$ 與週邊的兩個長方形 $EBHF$ 、 $FIDG$ 以及小正方形 $CHFI$ 組成），就是 $(225+15)$ 步，即 240 步，正好為一畝。

本題原來的文本並不嚴格，作者的行文帶有隨意性，且省略較多，因而不能將文字與術文非常精確地對應起來。另外，問題給出的計算方法本身在求小正方形 $CHFI$ 的面積時也犯

了錯誤，這應該是由於作者遷就正方形田面積一畝的結果。

本題中的“韋”字可能通“維”。¹在中國古代算書的盈不足問題中，常有“維乘”的說法，以前大家都理解為交叉相乘的意思。聯繫北大簡的情形，如果“韋乘”與“維乘”是同一術語之不同寫法的話，以前的理解可能有些片面了。這裡的“韋乘”有交織地、交互地乘的意思，在不同的具體問題有不同的表現形式。（以上均為鄒大海先生意見）

另外，算題 A 的最後一句“其投此用三章”也很值得注意。“投”字字形見圖四：A，這個字過去曾見於張家山漢簡《算數書》（圖四：B、C）和嶽麓秦簡《數》（圖四：D、E、F）。



圖四

B、C 見於《算數書》中的“少廣”：“B 少廣之術曰：先直（置）廣，即曰：下有若干步，以一為若干，以半為若干，以三分為若干，積分以盡所 C 分同之（164）以為法。……（165）”。D、E、F 分別見於嶽麓簡《數》中的簡 180、184、193，文例分別為：“D 城之述（術）”，“E 隄廣袤不等者”，“F 除之述（術）”。張家山漢簡整理組以及參加整理組的彭浩先生都將 B、C 釋為“救”，讀為“求”。²嶽麓簡部分資料發表後，彭浩先生又對 D、E、F 三字也做同樣釋讀。³《嶽麓書院藏秦簡（貳）》一書也採用了這個意見。但吳朝陽先生指出，B、C 兩字形與“救”字差異較大，他主張釋為“扱”。⁴無論釋“救”還是釋“扱”的學者，都同意其字義為“求”、“取”。

細審 A 至 E 諸字形，與睡虎地秦簡中的“投”字（圖四 G、H）很接近，其左旁顯然是“扌”而非“求”；而其右旁與睡虎地秦簡中用作偏旁的“及”字相比（見圖四 I “級”），差異也非常明顯，應該是“殳”而非“及”。許道勝先生曾引用 2010 年 9 月 22 日嶽麓秦簡《數》讀簡會上專家的意見，認為此字應釋為“投”。⁵程少軒先生結合放馬灘秦簡《日書》的“投”字，認為以上 B 至 F 諸字形均應釋“投”，“投”在古書中有“取”義。⁶兩位先生的意見無疑是正確的，將此字釋為“救”或“扱”都不妥，它應該就是“投”字。“投”

¹ 郭書春先生也指出，“韋乘”即《九章算術》“盈不足”章的“維乘”。我推測，“韋”可能通“緯”，“緯乘”是取經緯交織的形象來形容交互相乘的算法，“維”反而是後起的同音假借字。

² 《張家山漢墓竹簡（二四七號墓）》；彭浩：《張家山漢簡〈算數書〉注釋》，第 116 頁。

³ 彭浩：《嶽麓書院藏秦簡〈數〉中的“救（求）”字》，簡帛網 2009 年 11 月 30 日（http://www.bsm.org.cn/show_article.php?id=1184）。

⁴ 吳朝陽：《張家山漢簡〈算數書〉“少廣”之“救”字應釋“扱”》，簡帛網 2011 年 6 月 23 日（http://www.bsm.org.cn/show_article.php?id=1499）。另外朱漢民、肖燦兩位先生也曾將此字釋為“扱”，見朱漢民、肖燦：《從嶽麓書院藏秦簡〈數〉看周秦之際的幾何學成就》，《中國史研究》2009 年第 3 期。

⁵ 許道勝：《嶽麓秦簡〈數〉書文字釋讀舉隅》，簡帛網 2012 年 2 月 13 日（http://www.bsm.org.cn/show_article.php?id=1638）。

⁶ 程少軒：《放馬灘簡所見式古佚書的初步研究》，《中央研究院歷史語言研究所集刊》（台北）83 本 2 分；《小議秦漢簡中訓為“取”的“投”》，作者所贈未刊稿。

字作為秦漢《算書》類文獻中常用的術語，義為“求取”、“求解”。“其投此用三章”，大概是說求解這種問題要用到“三章”的方法；¹究竟是指哪“三章”，還有待進一步的整理和研究。²

小結

從北大秦簡《算書》土地面積類算題看來，《九章算術》“方田”章有關土地面積的十種問題，至少除最後三種“宛田”、“弧田”、“環田”外，其他七種的算法在戰國晚期（至遲到秦代）確已形成。這不僅更新了我們對周秦之際幾何學發展水平的認識，也再次證明了以往學者提出的《九章算術》的大部分內容形成於先秦至秦代的觀點。³在編輯體例方面，北大秦簡《算書》甲種“以類相從”的結構特徵，尤其是“篇”的劃分和“篇題”的設置，更是開啟了《九章算術》分“章”的先河。但我們也注意到，北大秦簡《算書》主要是針對日常生產生活中遇到的各種實際問題來對算題加以分類，而不是以同類數學方法的總結和歸納為原則，在“田”篇的土地面積類算題中包含着“勾股”和“盈不足”兩類知識就是典型例證。⁴在《九章算術》中，這兩類知識則被從實際應用問題中提取出來，形成獨立的章節。將張家山漢簡《筭數書》、嶽麓秦簡《數》與《九章算術》進行比較，或多或少也能看到類似的演變軌跡。《數書》（或《算書》）作為一類兼具實用性、工具性和理論性的特殊書籍，在結構、體例和文本演變規律方面，與其他類別的古書相比具有哪些共性和個性？這個問題以往學界關注較少。隨着近年來幾批秦漢數學簡牘的問世，從古書文本形態演變的角度考察戰國秦漢數學文獻的發展過程，已成為一個值得深入發掘的課題。

（韓巍，北京大學中國古代史研究中心，副教授，北京，100871）

¹ 從北大秦簡對“章”一詞的使用看來，“章”在《算書》中指的就是以大圓點為標誌的基本單位，與學界通常所說的“算題”大致等同。

² 鄒大海先生推測，“投此用三章”可能是指在驗算求正方形田的面積時，分三部分（圖中內側正方形 $AEFG$ 、兩個長方形 $EBHF$ 、 $FIDG$ 以及小正方形 $CHFI$ ）進行。可備一說。

³ 參看郭書春：《古代世界數學泰斗劉徽》，第 98-102 頁，山東科學技術出版社 1992 年；鄒大海：《中國數學的興起與先秦數學》，第 126-161 頁，河北科學技術出版社 2001 年；鄒大海：《出土〈算數書〉初探》，《自然科學史研究》第 20 卷第 3 期（2001 年 7 月）；鄒大海：《睡虎地秦簡與先秦數學》，《考古》2005 年第 6 期；郭書春主編：《中國科學技術史·數學卷》，第 38-44、77-84 頁，科學出版社 2010 年。

⁴ 嶽麓簡《數》的結構也有類似特點，惜其殘缺較多，無法完全復原。